CPI 2/S4

Exercice 1

Dans une école d'ingénierie. Une association compte 9 étudiants de première année, 10 étudiants de deuxième année, et 3 étudiants de troisiéme année.

1. Cette association doit choisir un comité représentatif constitué d'un étudiant de première année, d'un de deuxième année, et d'un de troisième année. Combien y a-t-il de comités possibles ?
2. On reprend les hypothèses précédentes mais on suppose maintenant que le comité doit être constitué de quatre étudiants, sachant qu'il faut comme auparavant, au moins un étudiant de chaque année. Combien y'a -t-il de comités possibles ?

Exercice 2

Une entreprise fabrique 4 types de pièces numérotées. On dispose d'un stock de :

8 pièces de type A vendues 8 DH l'unité,
7 pièces de type B vendues 6 DH l'unité,
6 pièces de type C vendues 5 DH l'unité,
5 pièces de type D vendues 4 DH l'unité.

Le service des ventes se propose de faire des lots de pièces. De combien de manières distinctes peut-on constituer :

1. un lot de 4 pièces ayant au moins une pièce D ?
2. un lot de 4 pièces ayant au moins une pièce D et au moins une pièce C ?
3. un lot de 4 pièces ayant au moins une pièce D et au moins une pièce C et au moins une pièce B ?
4. un lot de 3 pièces dont le prix soit 18 DH ?
5. un lot de 3 pièces dont le prix soit inférieur ou égal à 14 DH ?

Exercice 3

A	B	C
1	2	3
4	5	6
7	8	9
	0	

Un clavier de 13 touches permet de composer le code d'entrée d'un immeuble à l'aide d'une lettre suivie :

1. Combien de codes différents peut-on former ?
2. Combien y a-t-il de codes sans le chiffre 0 ?
3. Combien y a-t-il de codes comportant au moins une fois le chiffre 0 ?
4. Combien y a-t-il de codes comportant des chiffres distincts ?
5. Combien y a-t-il de codes comportant au moins deux chiffres identiques ?

Exercice 4

1. Dénombrer toutes les anagrammes possibles du mot "BRISÉE", dans les cas suivants :
   (a) En tenant compte de l'accent ?

(b) En ne tenant pas compte de l'accent ?

2. (a) Combien peut-on réaliser de mots de n lettres comportant k lettres se répétant $p_1, p_2, \dots, p_k$ fois ?

   (b) En déduire le nombre d'anagrammes du mot " ANAGRAMME " ?

Exercice 5

Pour A,B deux ensembles de E. On note $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Pour E un ensemble fini, montrer :

$$Card(A\Delta B) = CardA + CardB - 2Card(A \cap B)$$

Exercice 6

Une urne contient n boule vertes et p boules rouges où $n, p \geq 1$. On tire simultanément r boules de l'urne.$(1 \leq r \leq n)$

1. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. Pour $0 \leq k \leq r$, calculer le cardinal de l'événement Y_k défini par :

$$Y_k = \{\text{parmi les } r \text{ boules tirées, il y a } k \text{ boules vertes}\}.$$

3. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k C_p^{r-k} = C_{n+p}^r$.
4. A l'aide de ce qui précède, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2$ en fonction de n.

Exercice 7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ telle que $n \geq 2$. On définit la fonction f telle que $f(x) = (x+1)^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Donner une expression développée de $f(x)$ à l'aide de la formule du binôme de Newwton.
2. Calculer de deux maniéres $f'(x)$ et $f''(x)$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déduire des questions précédentes une expression simple de :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k, \quad S_2 = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k, \quad S_3 = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k, \quad S_4 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^n C_n^k \quad \text{et } S_5 = \sum_{k=0\,(k\,pair)}^{n} C_n^k.$$

4. Soit E un ensemble fini non vide. On note $n = Card(E)$. Montrer que

$$\sum_{A \in \mathcal{P}(E)} Card(A) = n2^{n-1}$$

Exercice 8

On se propose de calculer le nombre $S(n,p)$ de surjections de $\{1, \dots, n\}$ sur $\{1, \dots, p\}$, où $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

1. Des cas particuliers : calculer

$$S(n,p) \text{ pour } p > n, \quad S(n,n), \quad S(n,1), \quad \text{et } S(n,2).$$

2. Calculer $S(n+1,n)$.
3. Démontrer que, pour tout $n > 1$ et tout $p > 1$, on a la relation

$$S(n,p) = p\big(S(n-1,p) + S(n-1,p-1)\big).$$

4. En déduire un algorithme pour calculer $S(n,p)$.
5. Démontrer que $S(n,p) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} C_p^k k^n$.